Katedra za računarsku tehniku i informatiku

Algoritmi i strukture podataka

Milo V. Tomašević

Odsek za softversko inženjerstvo [SI]

Sadržaj

Uvod

- ***Algorithms*** + ***Data Structures*** = ***Programs***
- Dva osnovna gradivna bloka
  za implementaciju programskih sistema
- ***Struktura podataka*** – opis načina organizacije podataka
- ***Algoritam*** – opis načina obrade podataka

O algoritmima

- Osobine
  - ✓ jedan ili više ulaza i izlaza
  - ✓ nedvosmislenost i ostvarljivost naredbi
  - ✓ konačno vreme izvršavanja
- Determinističko ponašanje (ali i pseudoalgoritmi)
- Mera efikasnosti – vremenska i prostorna složenost
- Najčešće u pseudojeziku
- Implementacija algoritama (jezik, mašina)

O strukturama podataka

- Modelira objekte i podatke iz problema
- Elementarni, primitivni tipovi
- Složeni, struktuirani tipovi
  - ✓ logička struktura
  - ✓ fizička struktura
- Osnovni načini struktuiranja
  - ✓ homogeni - nizovi
  - ✓ nehomogeni - zapisi

Zapis

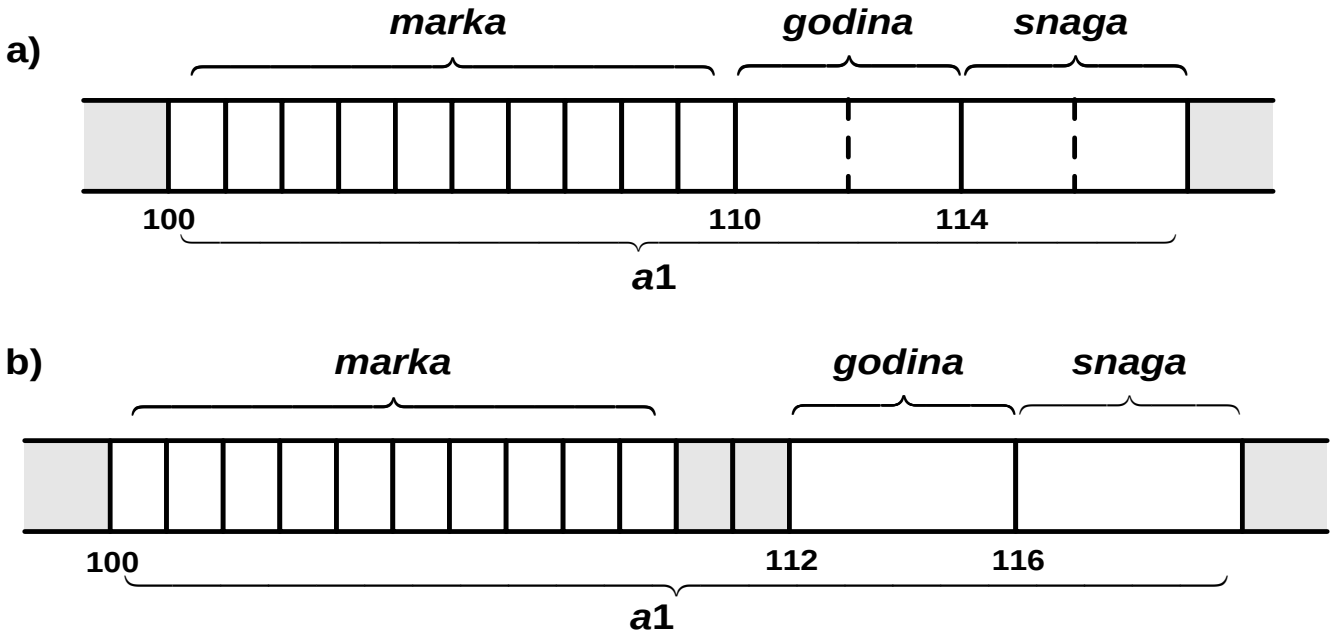
- Agregacija elemenata različitog tipa (polja)
- Tretira se kao logička celina
- Koristi se u implementaciji
  - ✓ dinamičkih struktura
  - ✓ datoteka
- Operacije obično nad poljima

Zapis

Smeštanje u memoriji

a) kontinualna alokacija polja

b) vezivanje polja za početak reči



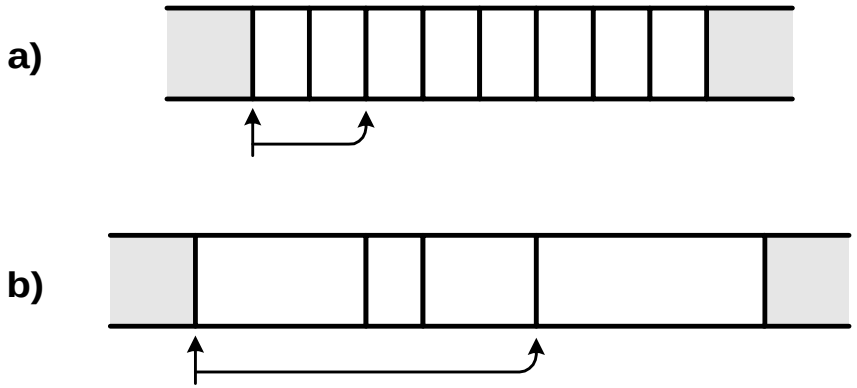
Podele struktura

- Po relacijama elemenata
  - ✓ linearne
  - ✓ nelinearne
- Po mogućnosti promene veličine
  - ✓ statičke
  - ✓ dinamičke
- Po mestu čuvanja
  - ✓ unutrašnje (u operativnoj memoriji)
  - ✓ spoljašnje (datoteke)

Memorijska reprezentacija

Sekvencijalna

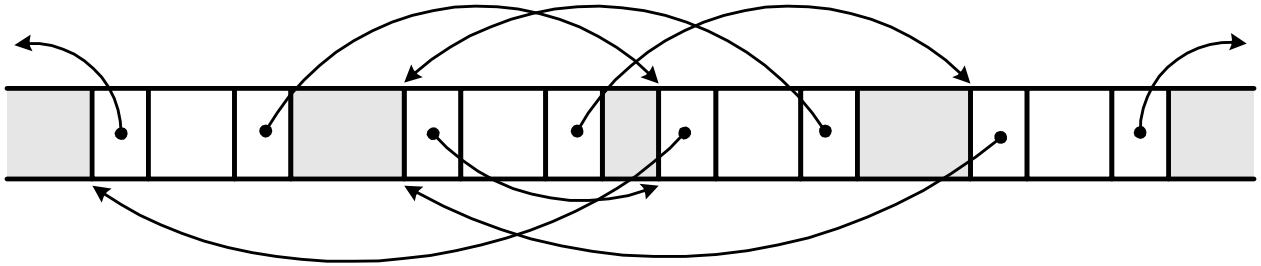
- Fizički i logički poredak isti
- Pristup elementima direktan
- Obično za linearne strukture



Memorijska reprezentacija

Ulančana

- Fizički i logički poredak različiti
- Pristup elementima indirektan
- Koristi pokazivački mehanizam
- Obično za nelinearne strukture



Linearne strukture podataka

- **Linearna lista** (a_1, a_2, ..., a_n), $n \geq 0$
- Apstraktni tip nezavisno od implementacije
- Strukturno svojstvo – jednodimenzionalnost
- Operacije
  - ✓ obilazak po poretku 1..n
  - ✓ pretraživanje
  - ✓ pristup elementu
  - ✓ umetanje
  - ✓ brisanje, ...

Linearne strukture podataka

- Implementacija
  - ✓ sekvencijalna – **niz**
  - ✓ ulančana – **ulančana lista**

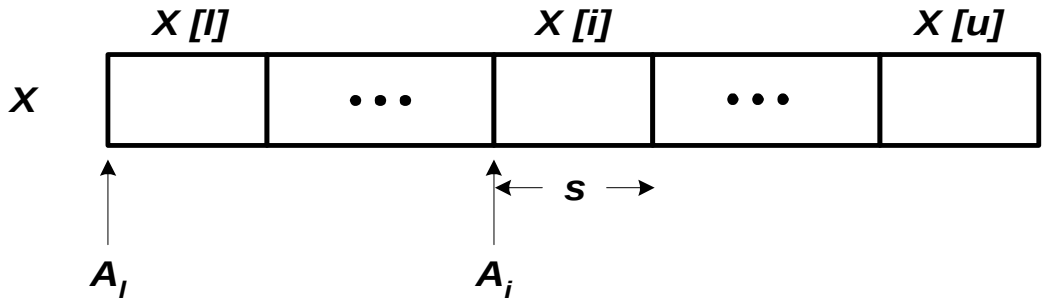
- Disciplina pristupa
  - ✓ LIFO - **stek**
  - ✓ FIFO - **red**

Nizovi

- **Niz** - homogeni struktuirani tip
- Indeks – pozicija elementa u nizu
- $X[l:u] = \{X[i]\},\ i = l, l + 1, \ldots, u - 1, u$
- Direktan pristup elementu bez ograničenja
- Višedimenzionalni nizovi (nizovi nizova)
- Selekcija elementa
- Operacije

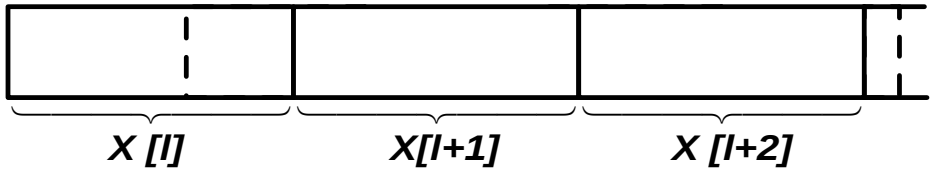
Smeštanje vektora

- Sekvencijalna reprezentacija,
  ne razdvaja se logički koncept od implementacije
- $A_i = A_l + (i - l)s$ (jedan element zauzima s reči)
- Efikasan, direktan pristup,
  neefikasno umetanje i brisanje

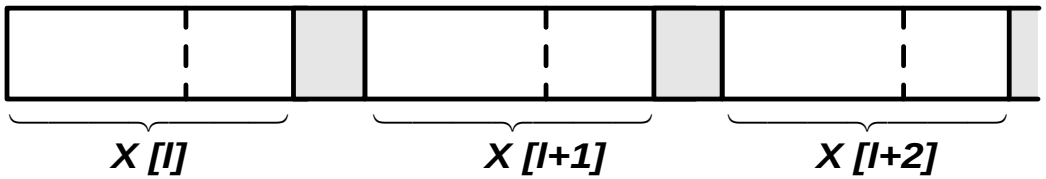


Smeštanje vektora

- Kontinualno
  - ✓ prostorno efikasno
  - ✓ neefikasan pristup

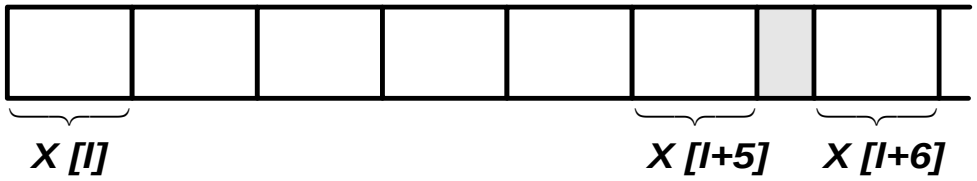


- Sa dopunjavanjem (*padding*)
  - ✓ iskorišćenje prostora $S_u = s / \lceil s \rceil$
  - ✓ efikasniji pristup

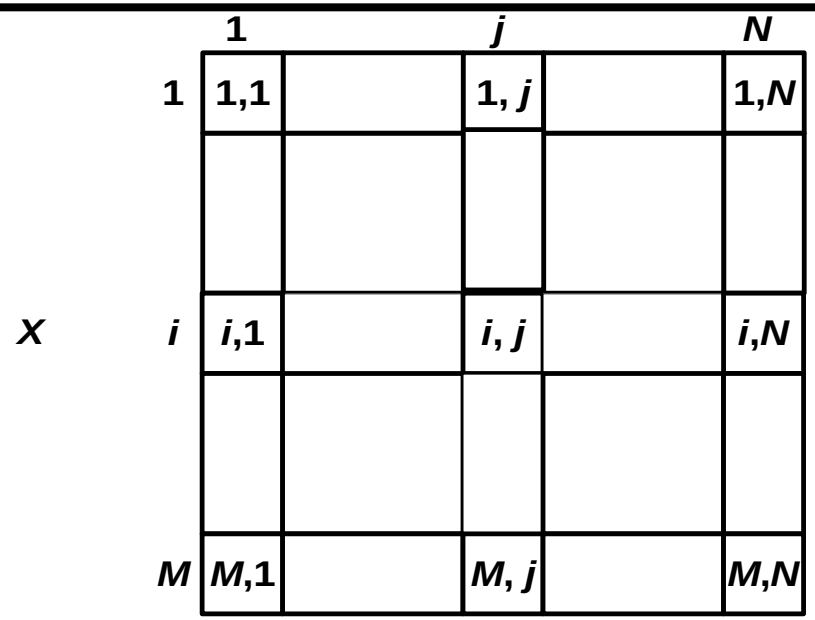


Smeštanje vektora

- Pakovanje
  - ✓ $k = \lfloor 1/s \rfloor$ elemenata u jednoj reči
  - ✓ prostorno iskorišćenje $S_u = ks$
  - ✓ $A_i = A_l + \lfloor (i - l)/k \rfloor$
    pozicija u reči $(i - l) \bmod k$



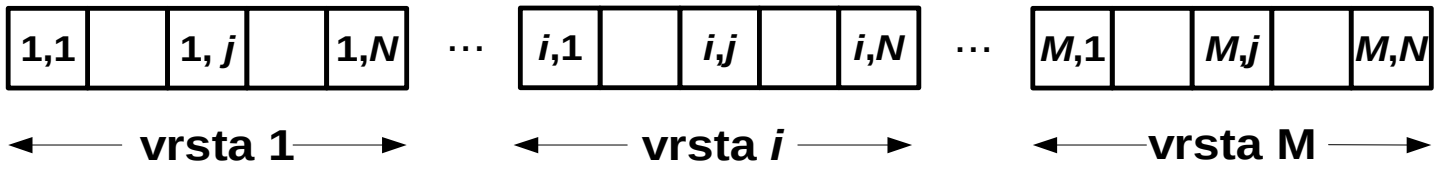
Smeštanje matrica



- Cilj - efikasna adresna funkcija
- Linearizacija
  - ✓ po vrstama (*row-major*)
  - ✓ po kolonama (*column-major*)

Smeštanje po vrstama

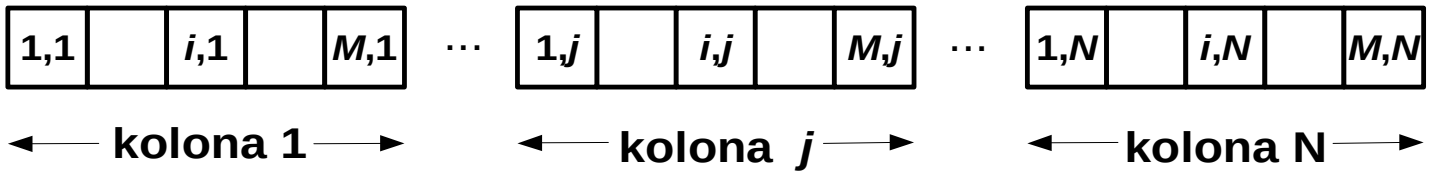
- $X[l_1{:}u_1, l_2{:}u_2]$
- $A_{i,j} = A_{l1,l2} + ((i - l_1)(u_2 - l_2 + 1) + j - l_2)s$



- $X[1{:}M,1{:}N]$
- $A_{i,j} = A_{1,1} + ((i - 1)N + j - 1)s$
- ne zavisi od broja vrsta

Smeštanje po kolonama

- $X[l_1{:}u_1, l_2{:}u_2]$
- $A_{i,j} = A_{l1,l2} + ((j - l_2)(u_1 - l_1 + 1) + i - l_1)s$



- $X[1{:}M,1{:}N]$
- $A_{i,j} = A_{1,1} + ((j - 1)M + i - 1)s$
- ne zavisi od broja kolona

Višedimenzionalni nizovi

- $X[1{:}u_1, 1{:}u_2, ..., 1{:}u_n]$
- Generalizovano smeštanje po vrstama

$X[1, ..., 1, 1]$ $X[1, ..., 1, 2]$ … $X[1, ..., 1, u_n]$

$X[1, ..., 2, 1]$ $X[1, ..., 2, 2]$ … $X[1, ..., 2, u_n]$

...

$X[u_1,..., u_{n-1},1]$ $X[u_1,..., u_{n-1},2]$ … $X[u_1,..., u_{n-1}, u_n]$

- Leksikogafski poredak

Višedimenzionalni nizovi

$$A_{i1,..,in} = A_{1,..,1} + ((i_1 - 1)u_2u_3...u_n + (i_2 - 1)\,u_3u_4...u_n + \ldots + (i_{n-1} - 1)u_n + i_n - 1)s$$

- Efikasno izračunavanje

```
offset = 0
for j  = 1 to n do
    offset = U [j ] offset + I [j ] - 1
end_for
A = A1,..,1 + s * offset
```

- Implikacije načina smeštanja

Optimizacije pri smeštanju

- Cilj – ušteda prostora, ali ipak efikasan pristup
- Primer - trougaone matrice

a)
$$\begin{bmatrix} x & & \\ x & 0 & \\ X & & x \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} x & & \\ x & X & \\ 0 & & x \end{bmatrix}$$

c)
$$\begin{bmatrix} 0 & & \\ 0 & 0 & \\ X & & 0 \end{bmatrix}$$

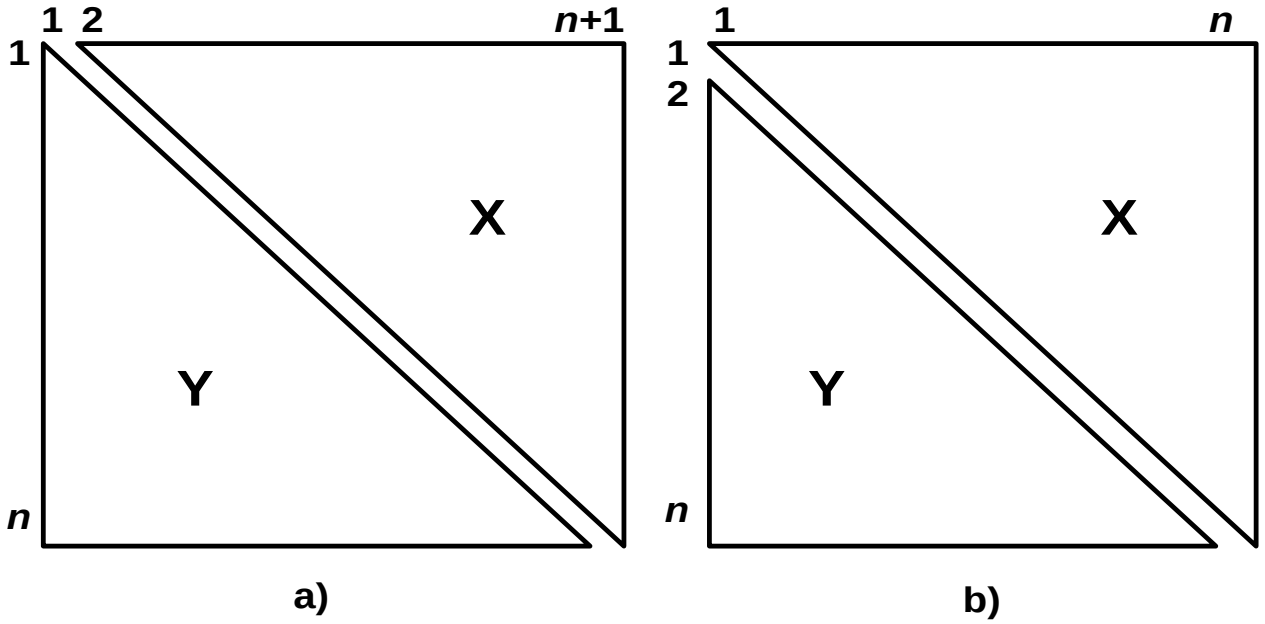
d)
$$\begin{bmatrix} 0 & & \\ 0 & X & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

Trougaona matrica

- Npr. donja trougaona matrica
  $X[i,j] = 0$, $i < j$
- Primena smeštanja po vrstama

  $X[1,1]$ $X[2,1]$ $X[2,2]$ $X[3,1]$ $X[3,2]$ $X[3,3]$ ...
- Ušteda u prostoru oko 50%
- $A_{i,j} = A_{1,1} + (i(i - 1)/2 + j - 1)s$ ako je $i \geq j$

Trougaone matrice



- $X[i,j] = Z[i,j+1]$ ako je $i \leq j$ $\quad X[i,j] = 0$ za $i > j$
- $Y[i,j] = Z[i,j]$ ako je $i \geq j$ $\quad Y[i,j] = 0$ za $i < j$

Retki nizovi

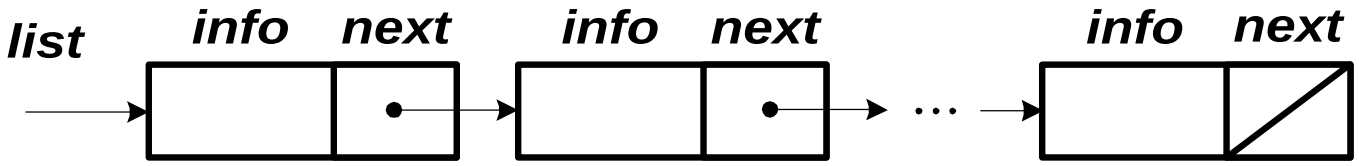
- Relativno veliki broj nultih elemenata
- Pamte se samo nenulti elementi – ušteda prostora
- Vektorska reprezentacija
- Neefikasne operacije!

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

R	C	V
1	3	4
2	4	5
2	6	11
4	1	9
4	4	8
5	7	15

Ulančane liste

- Nedostaci sekvencijalne implementacije
- **Ulančana lista** - ulančana implementacija linearne liste
- Element liste - čvor
- Dinamička alokacija, pokazivački mehanizam



Vrste lista

- Po načinu povezanosti
  - ✓ jednostruko ulančane
  - ✓ dvostruko ulančane

  - ✓ kružne
  - ✓ nekružne
- Po organizaciji
  - ✓ uređene
  - ✓ neuređene

Jednostruko ulančane liste

- Umetanje iza zadatog čvora

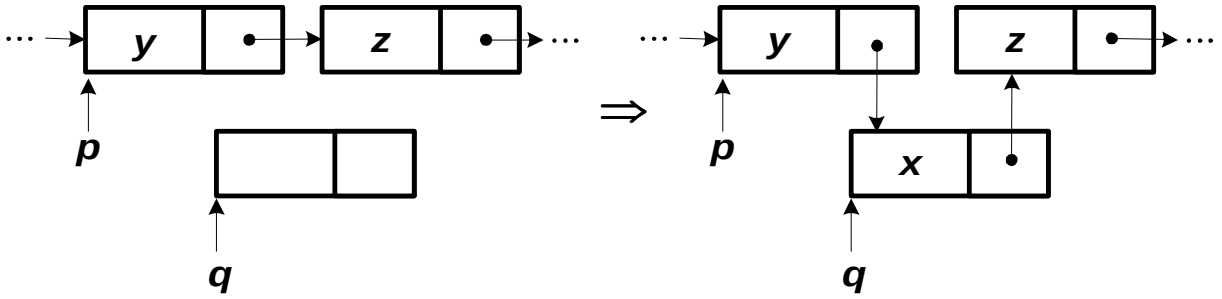
INSERT-AFTER(*p*, *x*)

q = GETNODE

info(*q*) = *x*

next(*q*) = *next*(*p*)

next(*p*) = *q*



Jednostruko ulančane liste

- Umetanje ispred zadatog čvora

INSERT-BEFORE(*p*, *x*)

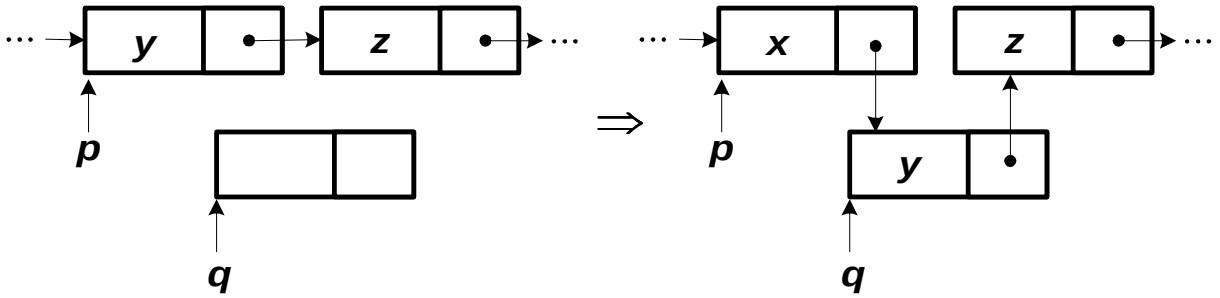
q = GETNODE

next(*q*) = *next*(*p*)

info(*q*) = *info*(*p*)

info(*p*) = *x*

next(*p*) = *q*



Jednostruko ulančane liste

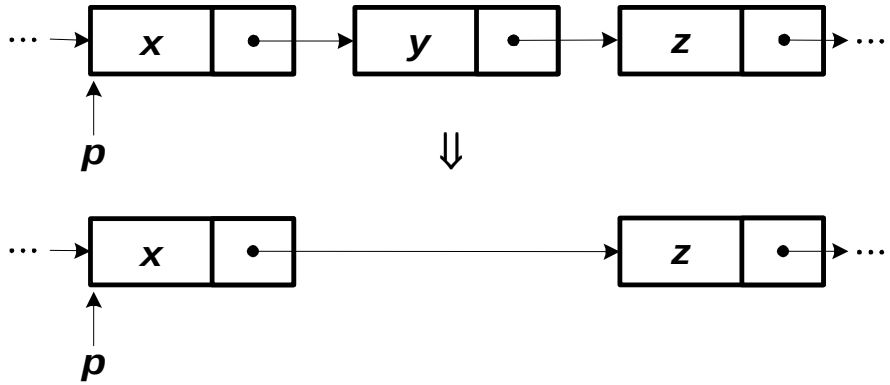
- Brisanje iza zadatog čvora

DELETE-AFTER(*p*)

q = *next*(*p*)

next(*p*) = *next*(*q*)

FREENODE(*q*)



Jednostruko ulančane liste

- Brisanje zadatog čvora

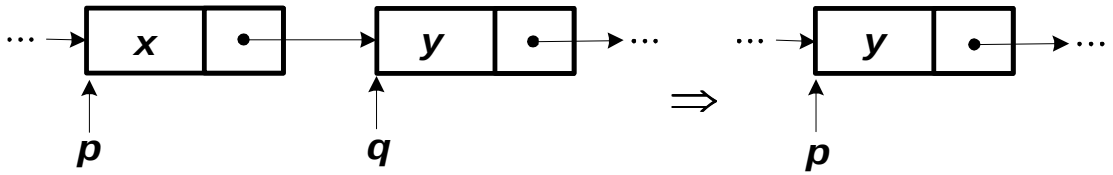
DELETE(*p*)

q = *next*(*p*)

next(*p*) = *next*(*q*)

info(*p*) = *info*(*q*)

FREENODE(*q*)



Jednostruko ulančane liste

Pretraživanje neuređene liste

```
SEARCH(list, x)
p = list
while (p ≠ nil) and (info(p) ≠ x) do
        p = next (p)
end_while
return p
```

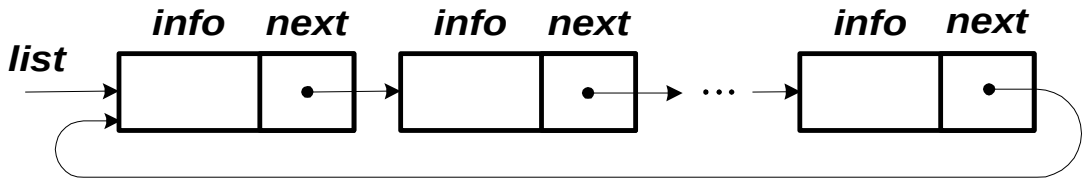
Jednostruko ulančane liste

Pretraživanje uređene liste

```
SEARCH-ORD(list, x)
p = list
while (p ≠ nil) and (info(p) < x) do
        p = next(p)
end_while
if (p ≠ nil) and (info(p) > x) then
        p = nil
end_if
return p
```

Kružne liste

- Poslednji čvor ukazuje na prvi



- Omogućeno kružno kretanje po listi
- Spoljašnji pokazivač na listu ponekad ukazuje na poslednji čvor

Kružne liste

INSERT-AFTER-C(*p*, *x*)

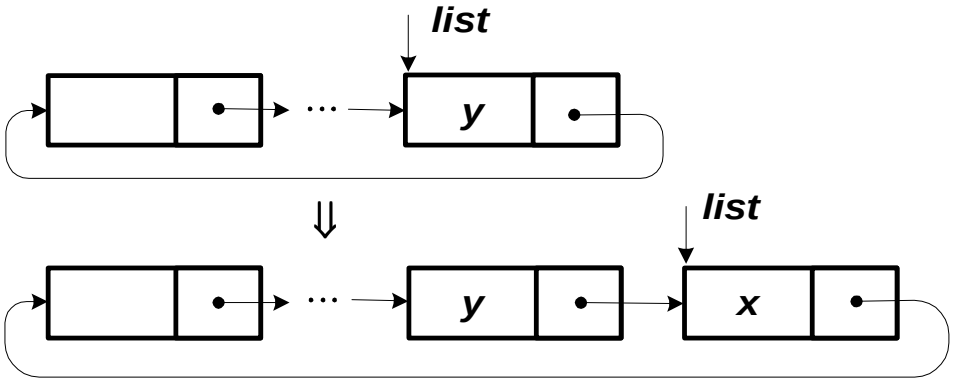
q = GETNODE

info(*q*) = *x*

next(*q*) = *next*(*p*)

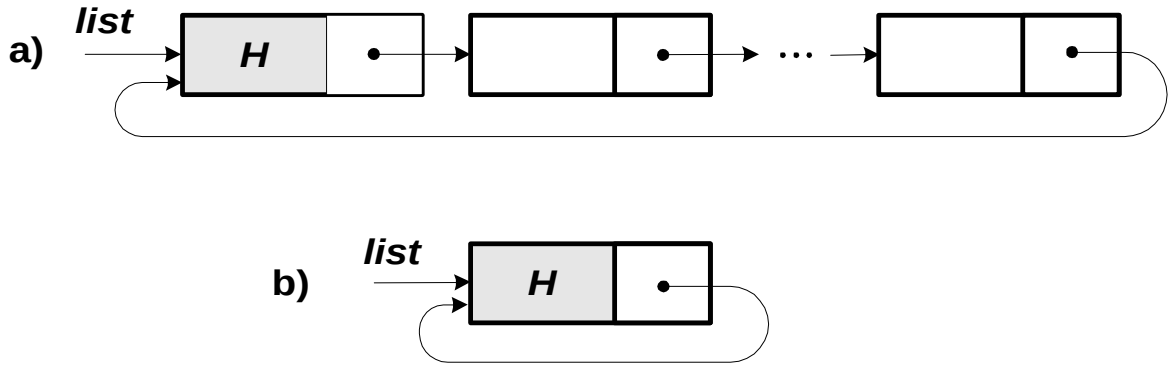
next(*p*) = *q*

if (*list* = *p*) **then**
list = *q*
end_if



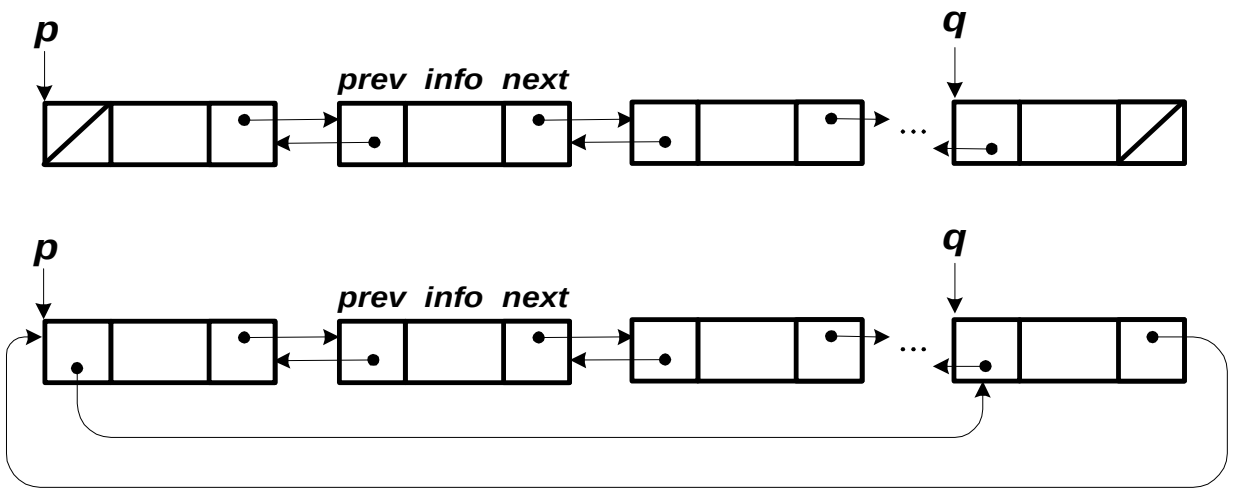
Kružne liste sa zaglavljem

- Na početku poseban čvor – **zaglavlje**
- Ukazuje na prvi čvor
- Lista nikad nije prazna!



Dvostruko ulančane liste

- Pokazivači na prethodnika i sledbenika
- Lako kretanje u oba smera
- *next*(*prev*(*p*)) = *p* = *prev*(*next*(*p*))



Dvostruko ulančane liste

Umetanje

INSERT-AFTER-D(*p*, *x*)

q = GETNODE

info(*q*) = *x*

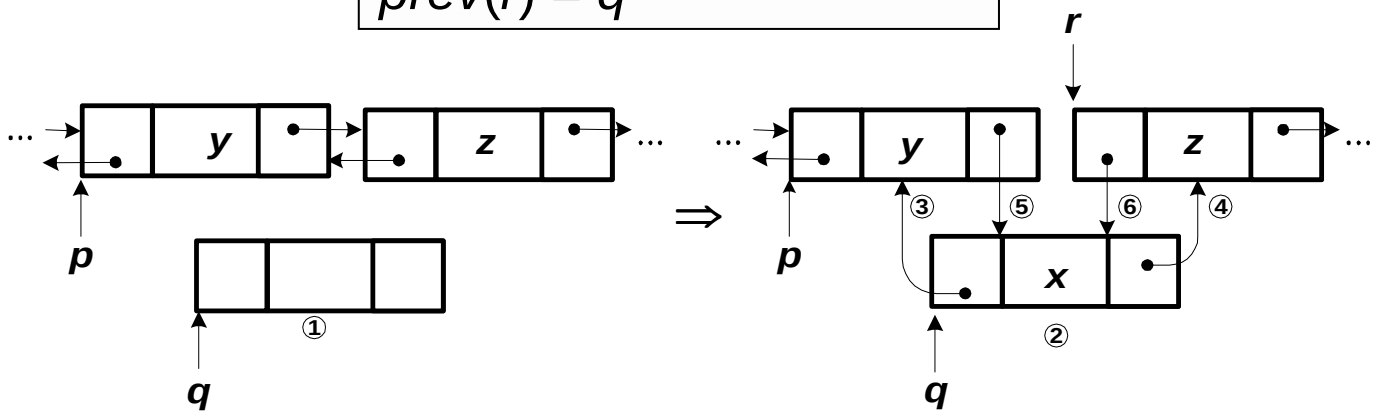
r = *next*(*p*)

prev(*q*) = *p*

next(*q*) = *q*

next(*p*) = *q*

prev(*r*) = *q*



Dvostruko ulančane liste

Brisanje

DELETE-D(*p*)

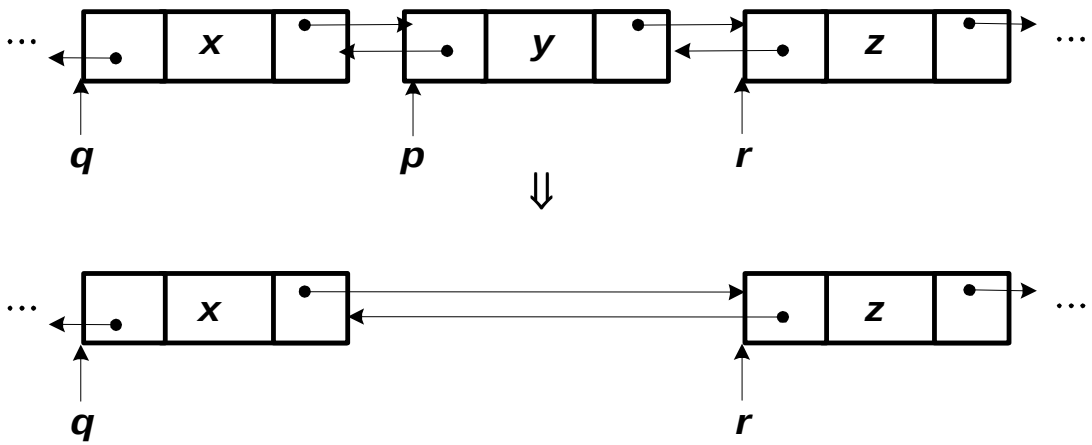
q = *prev*(*p*)

r = *next*(*p*)

next(*q*) = *r*

prev(*r*) = *q*

FREENODE(*p*)

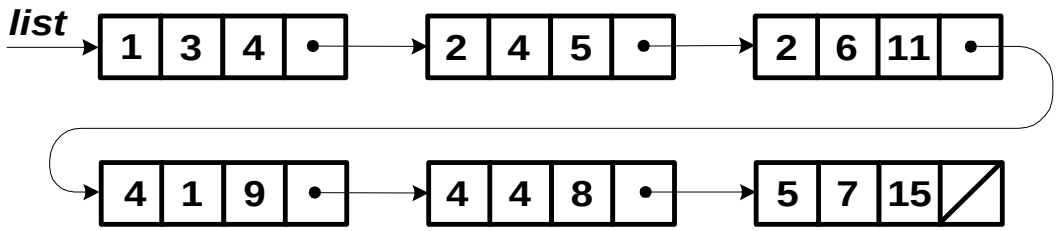


Poređenje nizova i lista

- Ulančana reprezentacija
  - ✓ obično bolje koristi prostor
  - ✓ efikasnija za operacije umetanja, brisanja, spajanja, ...
  - ✓ fleksibilnost za dinamičke strukture
- Sekvencijalna reprezentacija
  - ✓ efikasniji pristup elementu
  - ✓ pogodna za statičke strukture
- Vektorska implementacija liste

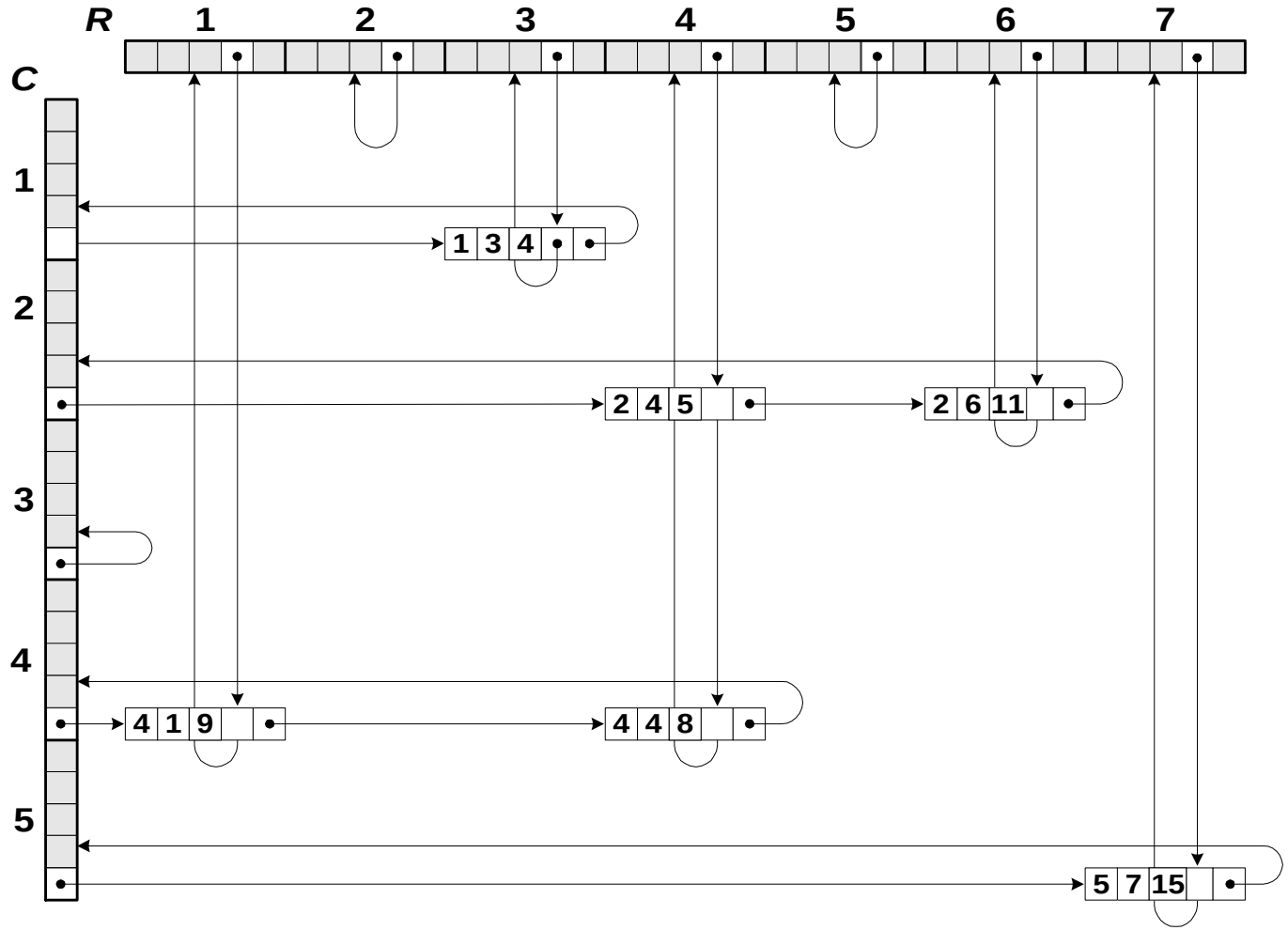
Predstavljanje retkih nizova

- Jednostruko ulančane liste (čvor - nenulti element)



- Lakše umetanje i brisanje
- Pristup i dalje neefikasan
- Poboljšanje – kružne liste ulančane po vrstama i kolonama

Predstavljanje retkih matrica



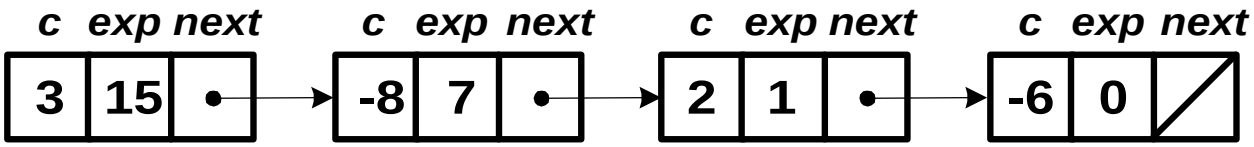
Predstavljanje skupova

- Vektorska realizacija
  - ✓ prostorna neefikasnost
  - ✓ efikasne operacije (unija, presek, razlika, pripadnost)

- Ulančana implementacija
  - ✓ čvor - element skupa
  - ✓ prostorno efikasnije
  - ✓ manje efikasne operacije (za uređene liste – $O(n)$, za neuređene liste – $O(n^2)$)

Predstavljanje polinoma

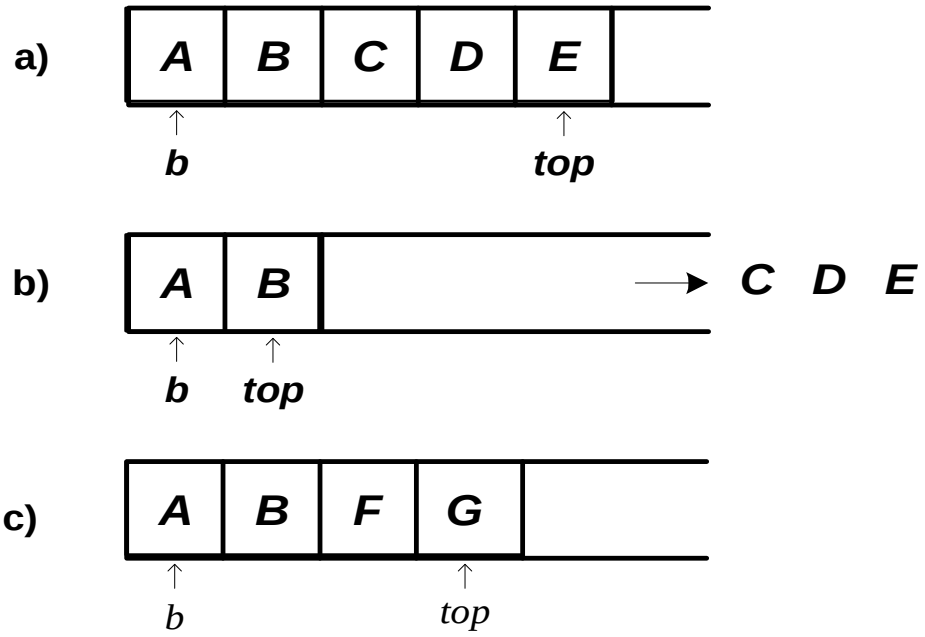
- Jednostruko ulančane kružne liste sa zaglavljem
- Npr. $3x^{15} – 8x^7 + 2x - 6$



- Ako su liste uređene po vrednosti polja eksponenta, efikasnost operacija veća

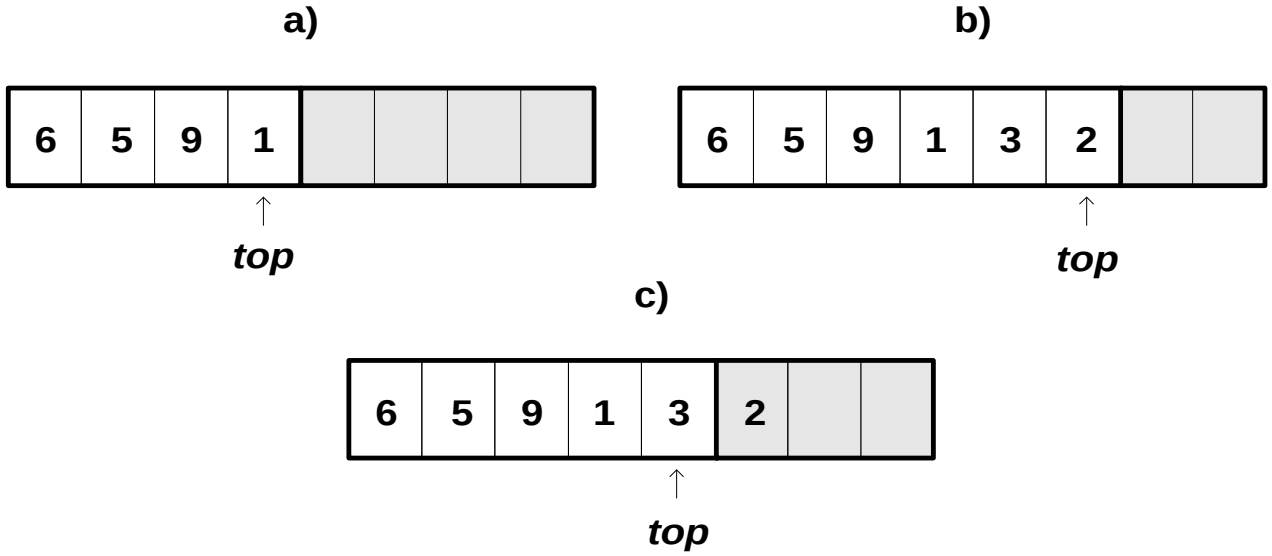
Stekovi

- Linearna lista sa LIFO disciplinom pristupa
- Jedan pristupni kraj – vrh steka
- Dinamička, homogena struktura



Sekvencijalna reprezentacija

- Niz *S*[1:*n*]
- Pokazivač steka *top*[*S*]
- Sadržaj *S*[1], ..., *S*[*top*[*S*]]



Operacije sa stekom

Provera da li je prazan

```
STACK-EMPTY(S)
if (top[S] = 0) then
      return true
else
      return false
end_if
```

Umetanje

```
PUSH(S, x)
if (top[S] = n) then
      ERROR(Overflow)
else
      top[S] = top[S] + 1
      S[top[S]] = x
end_if
```

Operacije sa stekom

Uklanjanje

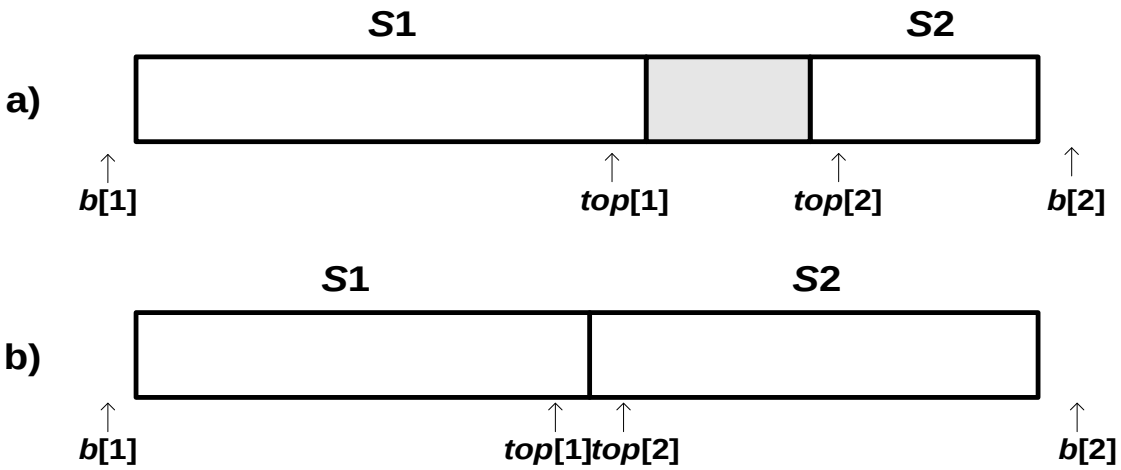
```
POP(S)
if (top[S] = 0) then
      return underflow
else
      x = S[top[S]]
      top[S] = top[S] – 1
      return x
end_if
```

Čitanje bez uklanjanja

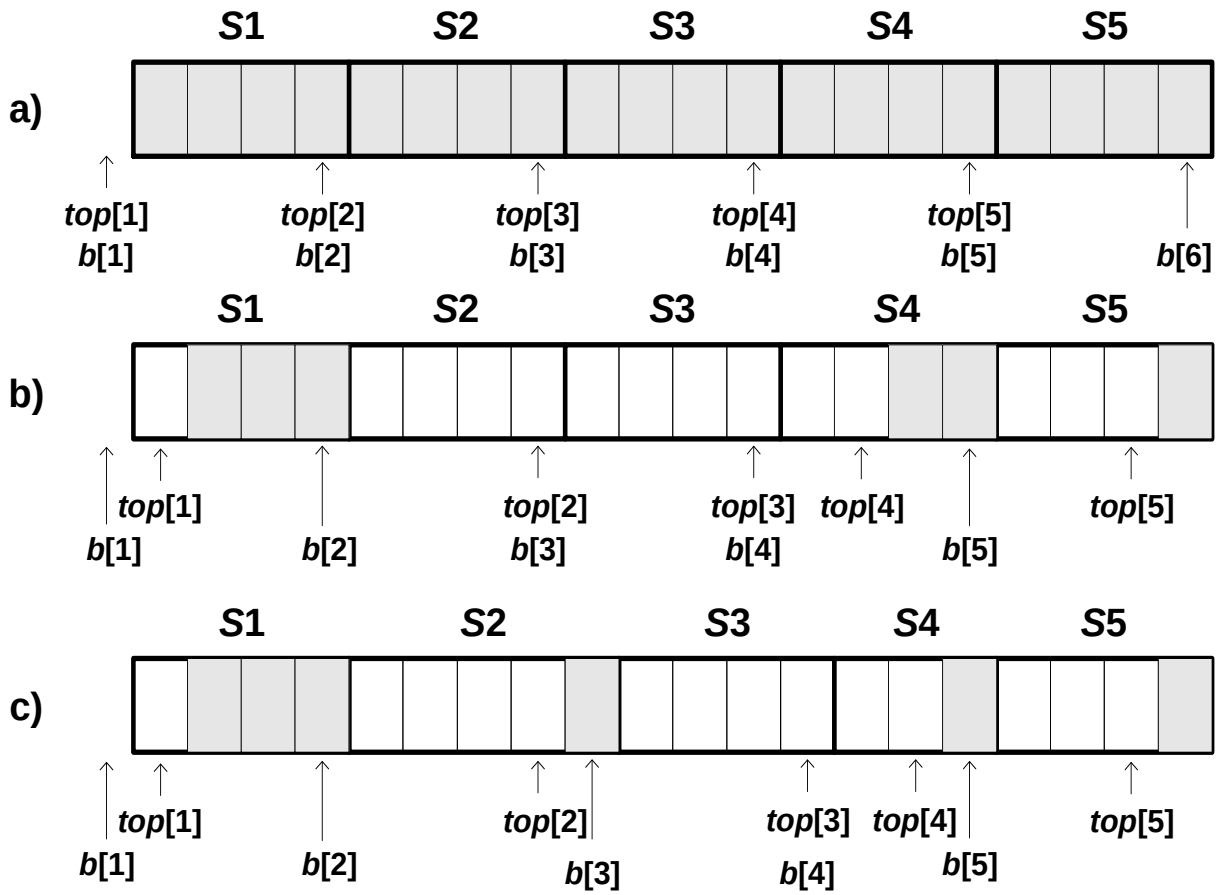
```
TOP(S)
if (top[S] = 0) then
      return underflow
else
      return S[top[S]]
end_if
```

Implementacija dva steka

- Rastu jedan prema drugom
- Realokacija prostora između stekova
- Uslov prekoračenja *top*[2] = *top*[1] +1



Implementacija više stekova



Implementacija više stekova

Brisanje

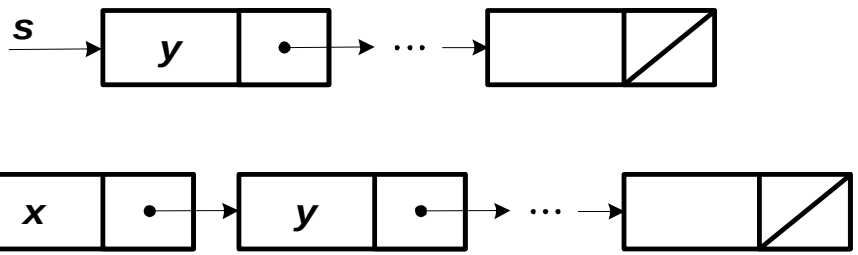
```
POP-M(i)
if (top[i] = b[i]) then
      return underflow
else
      x = V[top[i]]
      top[i] = top[i] – 1
      return x
end_if
```

Umetanje

```
PUSH-M(i, x)
if (top[i ] = b[i + 1]) then
      ERROR(Overflow)
else
      top[i ] = top[i ] + 1
      V[top[i ]] = x
end_if
```

- Poboljšanje - *Garwick*-ov algoritam

Ulančana reprezentacija steka



PUSH-L(*s*, *x*)
p = GETNODE
info(*p*) = *x*
next(*p*) = *s*
s = *p*

POP-L(*s*)
if (*s* = nil) **then**
    return underflow
else
    p = *s*
    s = *next*(*p*)
    x = *info*(*p*)
    FREENODE(*p*)
    return *x*
end_if

Obrada aritmetičkih izraza

- Infiksna notacija (npr. A+B)
  - ✓ prirodna i uobičajena
  - ✓ grupisanje operanada uz operatore uz pomoć zagrada (npr. (A+B)*C) i prioriteta (npr. A+B*C)
  - ✓ nepogodno za prevodioca (zahteva više skeniranja)
- Prefiksna (poljska) notacija (npr. +AB)
- Postfiksna (inverzna poljska) notacija (npr. AB+)

Obrada aritmetičkih izraza

- Konverzija iz infiksne u postfiksnu
  1. infiksni izraz sa potpunim zagradama
  2. operator zameni odgovarajuću desnu zagradu
  3. uklone se leve zagrade

Primer: A+B*(C-D)+(E-F)*G/H
((A+(B*(C-D)))+(((E-F)*G)/H))
ABCD-*+EF-G*H/+

- Osobine postfiksne notacije
  - ✓ isti poredak operanada kao u infiksnoj
  - ✓ operatori se izvršavaju po redosledu nailaska
  - ✓ nema potrebe za zagradama i prioritetom

Izračunavanje postfiksnog izraza

```
EVAL-EXP(postfix)
INIT_STACK(S, n)
while (not_end_of postfix) do
        x = INPUT(postfix)
        if (x = operand) then
                PUSH(S, x)
        else if (x = un_op) then
                        oprnd = POP(S)
                        rez = x oprnd
                        PUSH(S, rez)
                else if (x = bin_op) then
                                oprnd2 = POP(S)
                                oprnd1 = POP(S)
                                rez = oprnd1 x oprnd2
                                PUSH(S, rez)
        end_if
end_while
```

```
rez = POP(S)
if (STACK-EMPTY(S)) then
        return rez
else
        ERROR(Nepravilan izraz)
end_if
```

Konverzija infiks u postfiks

```
IN2POST(infix, postfix)
INIT-STACK(S, n)
rank = 0
next = INPUT(infix)
while (next) do
        if (next = operand) then
                OUTPUT(next, postfix)
                rank = rank + 1
        else
                while (not(STACK-EMPTY(S)) and (IPR(next)≤SPR(TOP(S))) do
                        x = POP(S)
                        OUTPUT(x, postfix)
                        rank = rank + R(x)
                        if (rank < 1) then
                                ERROR(Nepravilan izraz)
                        end_if
                end_while
                if (next ≠ ')' ) then
                        PUSH(S, next)
                else
                        x = POP(S)
                end_if
        end_if
        next = INPUT(infix)
end_while
```

Obrada aritmetičkih izraza

```
while (not(STACK-EMPTY(S))) do
        x = POP(S)
        OUTPUT(x, postfix)
        rank = rank + R(x)
end_while
if (rank ≠ 1) then
        ERROR(Nepravilan izraz)
end_if
```

operator	ipr	spr	R
+, -	2	2	-1
*, /	3	3	-1
↑	5	4	-1
(	6	0	-
)	1	-	-

Generisanje koda

1-A mašina

Šablon za O1+O2

1. LOAD O1
2. ADD O2
3. STORE T1

Algoritam

- operand na stek
- operator:
  - ✓ O2, pa O1 sa steka
  - ✓ kod po šablonu za dati operator
  - ✓ međurezultat na stek

Obrada aritmetičkih izraza

infix: (A+B*C)/D postfix: ABC*+D/

1-A mašina

```
LOAD B
MUL C
STORE T1
LOAD A
ADD T1
STORE T2
LOAD T2
DIV D
STORE T3
```

1-A mašina (optimizovano)

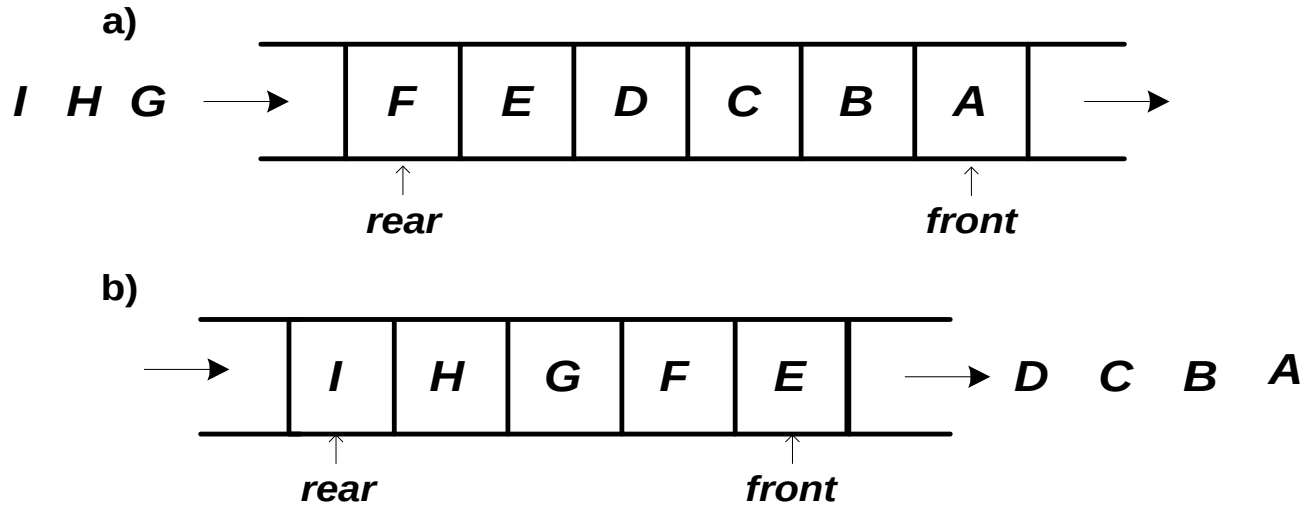
```
LOAD B
MUL C
ADD A
DIV D
STORE T1
```

0-A mašina

```
PUSH A
PUSH B
PUSH C
MUL
ADD
PUSH D
DIV
```

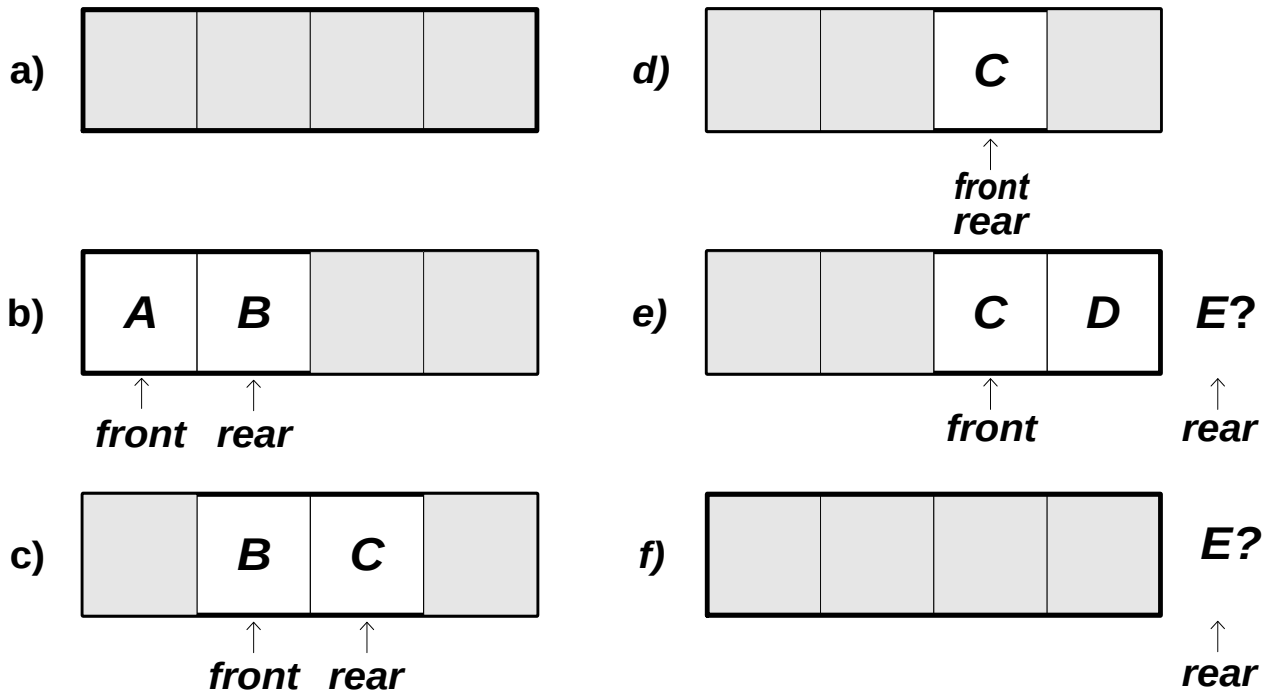
Redovi

- Linearna lista sa FIFO disciplinom pristupa
- Dva pristupna kraja – čelo i začelje
- Dinamička, homogena struktura



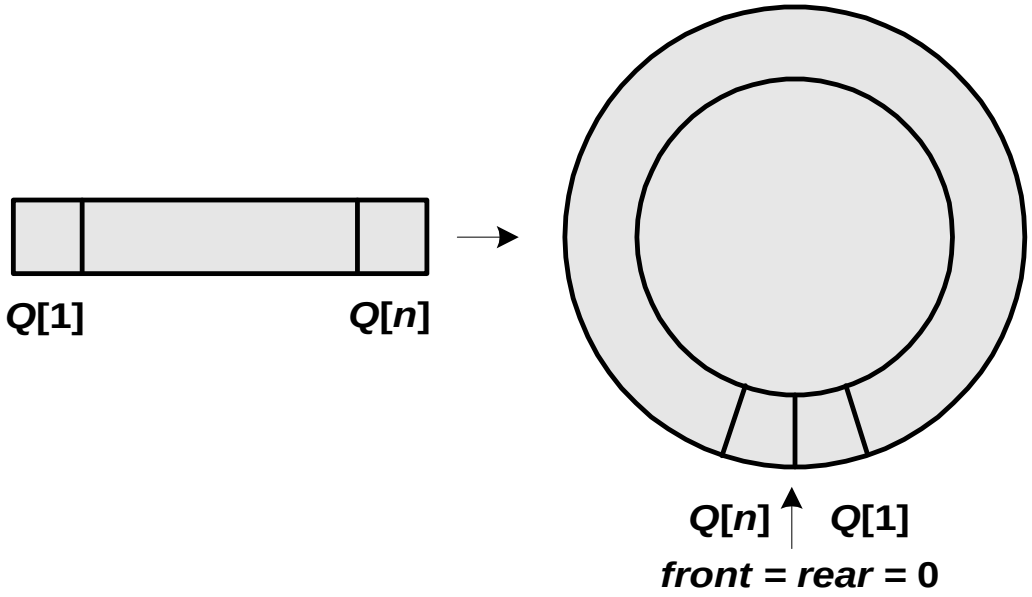
Sekvencijalna reprezentacija reda

- Niz $Q[1:n]$
- Pokazivači *front* i *rear*

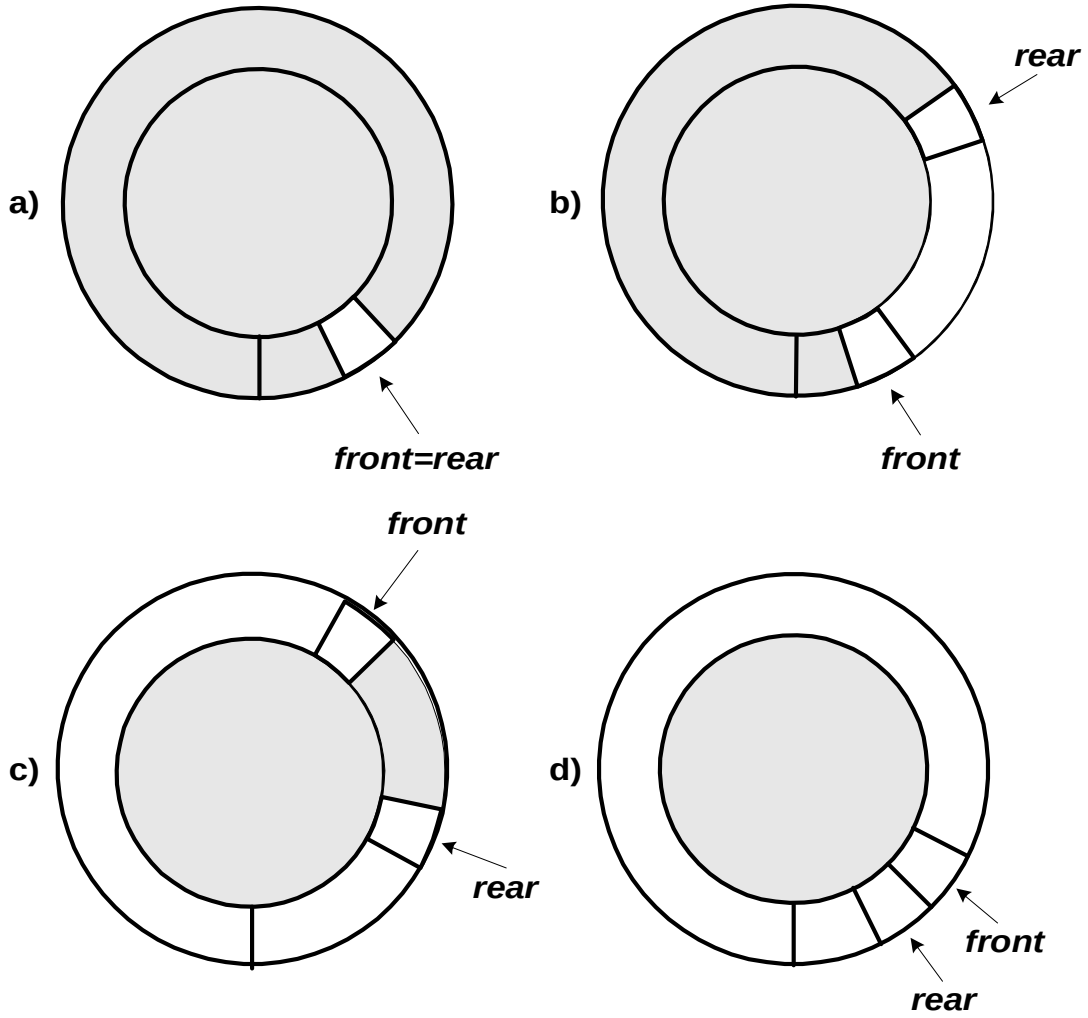


Sekvencijalna reprezentacija reda

- Kružni bafer
- *Q[1]* i *Q[n]* logički susedne



Sekvencijalna reprezentacija reda

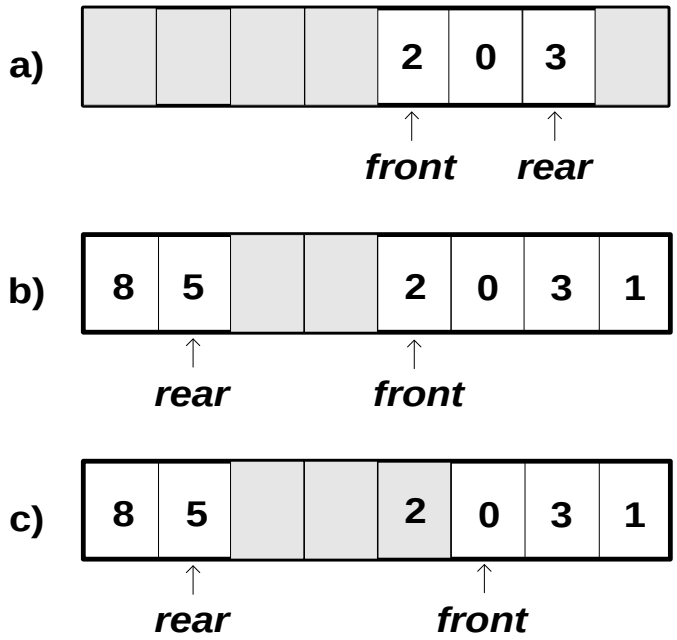


Operacije sa redom

Umetanje

```
INSERT(Q, x)
rear[Q] = rear[Q] mod n + 1
if (front[Q] = rear[Q]) then
    ERROR(Overflow)
else
    Q[rear[Q]] = x
    if (front[Q] = 0) then
        front[Q] = 1
    end_if
end_if
```

Operacije sa redom



Operacije sa redom

DELETE(*Q*)

```
if (front[Q] = 0) then
    return underflow
else
    x = Q[front[Q]]
    if (front[Q] = rear[Q]) then
        front[Q] = rear[Q] = 0
    else
        front[Q] = front[Q] mod n + 1
    end_if
    return x
end_if
```

QUEUE-EMPTY(*Q*)

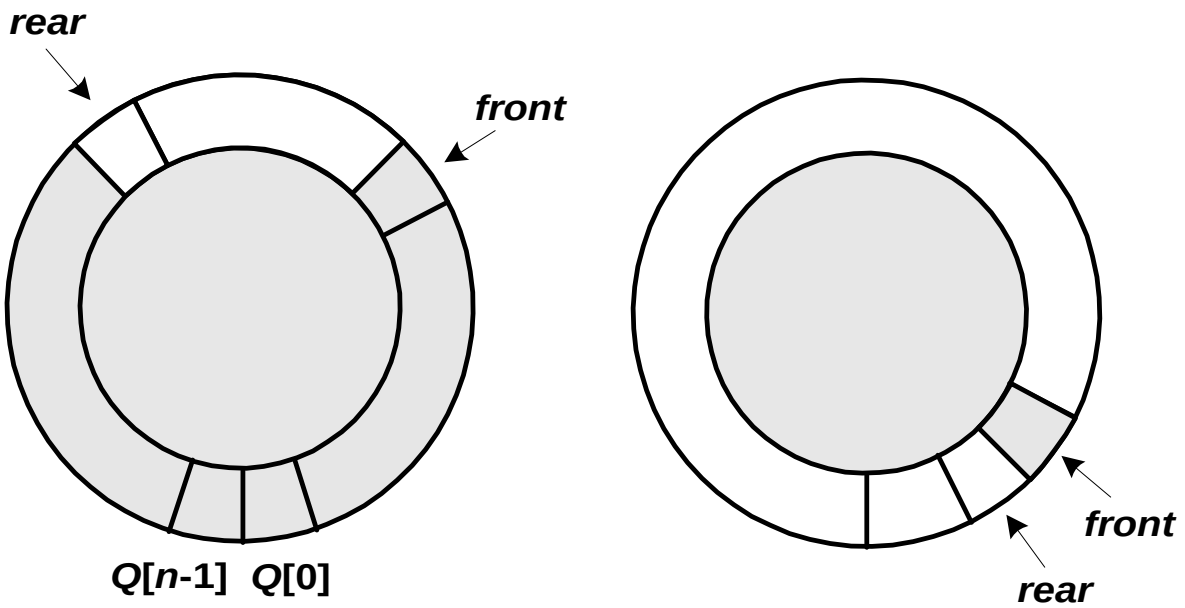
```
if (front[Q] = 0) then
    return true
else
    return false
end_if
```

Provera

Brisanje

Alternativna reprezentacija

- Niz $Q[0:n-1]$
- Prazan red *front* = *rear*



Operacije sa redom

Provera

```
QUEUE-EMPTY-0(Q)
if (front[Q] = rear[Q]) then
    return true
else
    return false
end_if
```

Brisanje

```
DELETE_0(Q)
if (front[Q] = rear[Q]) then
    return underflow
else
    front[Q] = (front[Q] + 1) mod n
    return Q[front[Q]]
end_if
```

Operacije sa redom

Umetanje

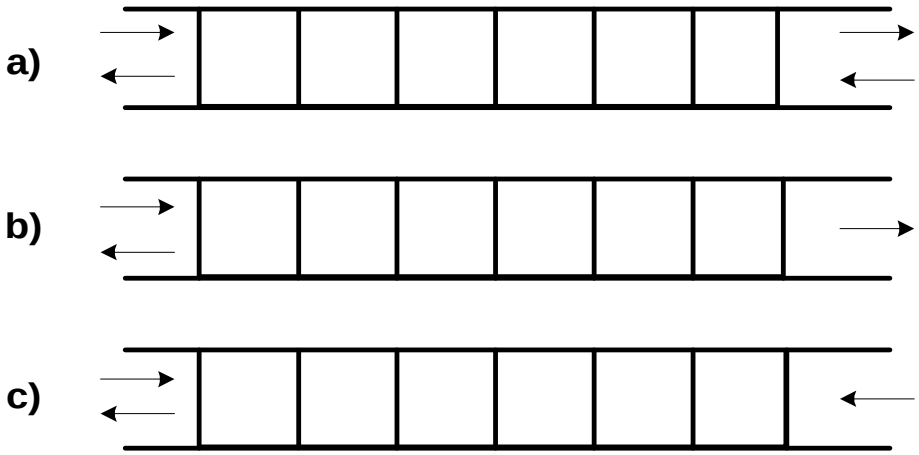
```
INSERT_0(Q, x)
rear[Q] = (rear[Q] + 1) mod n
if (front[Q] = rear[Q]) then
        ERROR(overflow)
else
        Q[rear[Q]] = x
end_if
```

Dvostrani red

a) Umetanje i brisanje na oba kraja

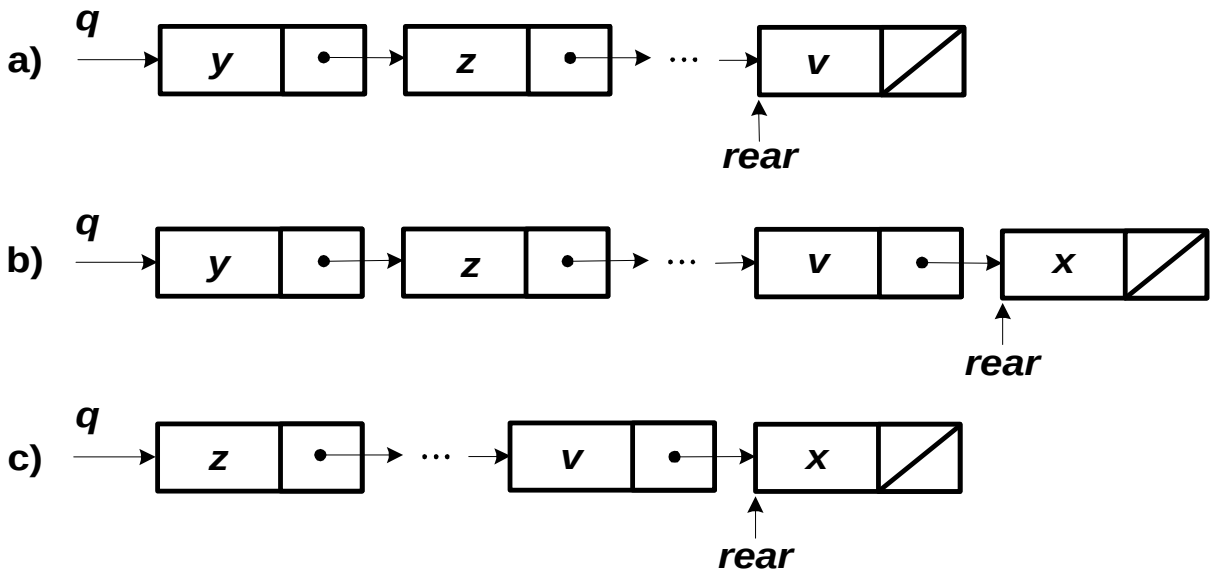
b) Umetanje samo na jednom kraju

c) Brisanje samo na jednom kraju



Ulančana reprezentacija reda

- Jednostruko ulančana lista (*rear* na poslednji čvor)
- Može i kružna lista



Ulančana reprezentacija reda

```
INSERT-L(q, x)
p = GETNODE
info(p) = x
next(p) = nil
if (rear[q] = nil) then
    q = p
else
    next(rear[q]) = p
end_if
rear[q] = p
```

```
DELETE-L(q)
if (q = nil) then
    return underflow
else
    p = q
    x = info(p)
    q = next(p)
    if (q = nil) then
        rear[q] = nil
    end_if
    FREENODE(p)
    return x
end_if
```

Prioritetni red

- Poredak brisanja elemenata zavisi od *prioriteta* – sadržaja elementa
- Rastući i opadajući prioritetni red
- Poredak umetanja može biti od značaja samo kod elemenata sa istim prioritetom
- Više implementacija različite efikasnosti

Prioritetni red

```
PQ-INSERT(pq, x)
q = nil
p = pq
while (p ≠nil) and (x ≥ info(p)) do
        q = p
        p = next(p)
end_while
if (q = nil) then
        PUSH-L(pq, x)
else
        INSERT-AFTER(q, x)
end_if
```